МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ЗЕРНОГРАДЕ
(Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

Кафедра «Теплоэнергетика
и информационно-управляющие системы»

А.А. Емелин, Л.Н. Шаповалова

ИНФОРМАТИКА. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ, ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭВМ

Практикум

Зерноград – 2019

УДК 004(075.32)
Е60

Издается по решению методической комиссии по общеобразовательной подготовке факультета среднего профессионального образования Азово-Черноморского инженерного института – филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Донской государственный аграрный университет» в г. Зернограде

Рецензенты:
кандидат социологических наук, доцент кафедры «Высшая математика и механика» ***Серёгина В.В.***,
кандидат технических наук, доцент кафедры «Теплоэнергетика и информационно-управляющие системы» ***Лебедев К.Н.***

Е60 **Емелин, А.А.** Информатика. Системы счисления, количество информации, логические основы ЭВМ: практикум / А.А. Емелин, Л.Н. Шаповалова. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2019. – 44 с.

Практикум предназначен для обучающихся на факультете среднего профессионального образования по специальностям: 23.02.03 – «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта», 38.02.01 – «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)», 35.02.08 – «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства», 21.02.05 – «Земельно-имущественные отношения», по дисциплине ПД.02 «Информатика».

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры теплоэнергетики и информационно-управляющих систем.
Протокол № 3 от 15 октября 2018 г.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией по общеобразовательной подготовке факультета СПО.
Протокол № 3 от 27 ноября 2018 г.

Содержание

Предисловие

Практикум посвящен трем разделам дисциплины ПД.02 «Информатика»: «Системы счисления», «Количество информации», «Логические основы ЭВМ». Он предназначен для обучающихся на факультете среднего профессионального образования по специальностям: 23.02.03 – «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта», 38.02.01 – «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)», 35.02.08 – «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства», 21.02.05 – «Земельно-имущественные отношения». Компетенции, которые может освоить обучающийся по каждому направлению, изложены в рабочих программах по дисциплине ПД.02 «Информатика».

В каждом разделе приведены краткий теоретический курс, примеры решения задач и упражнения, ответы и решения. Краткий теоретический курс позволит обучающемуся вспомнить теорию по каждому разделу, изложенную на лекционных занятиях. Решение упражнений позволить упрочить теоретические знания и получить навыки решения задач по данным разделам.

Первый раздел практикума посвящен изучению позиционных систем счисления. В нем рассмотрены задачи перевода из одной системы счисления в другую, арифметические операции в различных системах счисления, представление отрицательных чисел в компьютере.

Во втором разделе изложен краткий теоретический курс по теме «Количество информации», приведены примеры решения задач по вычислению количества информации, кодированию текстовой и графической информации.

Логические основы ЭВМ стали темой третьего раздела. В нем изложен краткий теоретический курс по булевой алгебре (алгебре логики). В нем рассмотрены следующие вопросы:

1) определение логического высказывания;
2) логические операции;
3) основные равносильности;
4) применение формул алгебры логики для решения задач.

Авторы разработали практикум так, чтобы он приносил реальную пользу и давал устойчивые навыки работы с изложенным материалом, а также умение решать задачи.

В конце практикума предложен список литературы, с помощью которой можно изучить разделы информатики более расширенно.

1. Системы счисления

Для обработки информации в вычислительных системах её кодируют в виде числовой последовательности. Цифровое представление информации позволяет ускорить её обработку. В ЭВМ информацию кодируют в двоичной, восьмеричной, десятичной и шестнадцатиричной системах счисления.

Определение 1. ***Система счисления*** – это совокупность правил для обозначения и наименования чисел.

Различают непозиционные и позиционные системы счисления.

Определение 2. Системы счисления, в которых каждой цифре (символу) ставится в соответствие некоторая величина, не зависящая от её места в записи числа, называются ***непозиционными.***

Например, число 25 в римской системе счисления можно записать различными способами. XXV=XVX=VXX.

Определение 3. Системы счисления, в которых вклад каждой цифры в величину числа зависит от её положения (позиции) в последовательности цифр, называются ***позиционными.***

К ним относятся двоичная, восьмеричная, десятичная, шестнадцатиричная и другие системы счисления. Например, при перестановке двойки и шестерки в числе 623 изменится и его значение 263.

Определение 4. ***Основанием*** позиционной системы счисления q называют количество символов, используемых для записи чисел.

Так, в

- двоичной системе счисления ($q = 2$): 0, 1;
- восьмеричной системе счисления ($q = 8$): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;
- десятичной системе счисления ($q = 10$): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- шестнадцатиричной системе счисления ($q = 16$): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

При записи числа основание системы счисления указывают как его нижний индекс. Например, 110011_2, 467_8, $A89_{16}$, 256_{10}. В общем случае в такой позиционной системе счисления с основанием $д$ любое число X может быть представлено в виде полинома разложения:

$$A_q = a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_1 q + a_0 q^0 + a_{-1}q^{-1} + \ldots + a_{-m}q^{-m} = \\ = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i q^i, \qquad (1)$$

где A_q – запись числа в системе счисления с основанием q;

q – основание системы счисления;

a_i – целые числа, меньше q;

n – число разрядов (позиций) в целой части числа;

m – число разрядов в дробной части числа.

Ниже в таблице представлена запись чисел от 0 до 16 в двоичной, восьмеричной, десятичной и шестнадцатиричной системах счисления.

Таблица 1 – Позиционные системы счисления

двоичная	восьмеричная	десятичная	шестнадцатиричная
1	1	1	1
10	2	2	2
11	3	3	3
100	4	4	4
101	5	5	5
110	6	6	6
111	7	7	7
1000	10	8	8
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F

Переход от любой системы счисления к десятичной

Переход к десятичной системе счисления осуществляется с использованием формулы (1). Разберем этот алгоритм на примере.

Пример 1. Перевести число $253{,}4_8$ в десятичную систему счисления.
Решение
Расставим порядок разрядов (цифр) в этом числе. Нулевой разряд находится слева от десятичной запятой (делителя целой и дробной части). Для этого числа – это цифра 3. Увеличение порядка разрядов происходит в сторону старшего разряда (влево), в обратную сторону – уменьшение порядка разрядов. Затем воспользуемся формулой (1):

$$\overset{2}{2}\overset{1}{5}\overset{0}{3},\overset{-1}{4}_8 = 2\cdot 8^2 + 5\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 + 4\cdot 8^{-1} = 128 + 40 + 3 + 0{,}5 = 171{,}5.$$

Ответ: $253{,}4_8 = 171{,}5_{10}$.

Пример 2. Перевести число AEF,C_{16} в десятичную систему счисления.
Решение
Расставим порядок разрядов (цифр) в этом числе. Нулевой разряд находится слева от десятичной запятой (делителя целой и дробной части). Для этого числа – это цифра *F*. Затем воспользуемся формулой (1):

$$\overset{2}{A}\overset{1}{E}\overset{0}{F},\overset{-1}{C}_{16} = 10\cdot 16^2 + 14\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 + 12\cdot 16^{-1} = 2560+240+15+0{,}75 = 2815{,}75.$$

Ответ: $AEF,C_{16} = 2815{,}75_{10}$.

Пример 3. Перевести число $101100,11_2$ в десятичную систему счисления.
Решение
Расставим порядок разрядов (цифр) в этом числе:

$$\overset{543\,210-1-2}{101100,11_2} = 1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0+1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}=$$
$$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 + 0,5 + 0,25 = 44,75.$$

Ответ: $101100,11_2 = 44,75_{10}$.

Перевод чисел из десятичной системы счисления в произвольную

§1. Перевод целых положительных чисел. Пусть *Ac* – целое десятичное положительное число. Согласно (1) любое число можно, используя схему Горнера, записать в виде:

$$A_c = a_0 + q(a_1 + q(a_2 + q(a_3 + \ldots + q\cdot a_{n-1}))). \quad (2)$$

Такое число в системе счисления с основанием q можно будет записать в виде:

$$A_c = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0.$$

Первый шаг преобразования заключается в делении *Ac* на основание системы q. Частное от деления будет равно $a_1 + q(a_2 + q(a_3 + \ldots + q\cdot a_{n-1}1))$, а остаток от деления будет равен a_0. На втором этапе частное опять делим на q. На этом этапе остаток от деления равен a_1.

Если продолжать процесс деления на q, то после n-го шага получим последовательность остатков деления: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$.

Утверждение 1. *Процесс деления продолжается до тех пор, пока частное не будет равно нулю.*

Пример 4. Перевести число 48_{10} из десятичной системы счисления в двоичную.
Решение
1) Делим 48 на 2. Частное равно 24, остаток равен 0.
2) Делим 24 на 2. Частное равно 12, остаток равен 0.
Весь алгоритм можно записать в виде таблицы [1].

Шаг	Число/частное	Делитель	Остаток
1	48	2	0
2	24	2	0
3	12	2	0
4	6	2	0
5	3	2	1
6	1	2	1

Запишем последовательность цифр от шестого шага к первому: 110000. *Ответ*: $48_{10} = 110000_2$.

§2. Перевод десятичной дроби из десятичной системы счисления в произвольную систему счисления. Пусть $A_{дд}$ – десятичная дробь. Согласно (1) её можно записать в виде:

$$A_{дд} = a_{-1}q^{-1} + a_{-2}q^{-2} + a_{-3}q^{-3} + \ldots$$

На первом этапе умножим число $A_{дд}$ на q.
Произведение будет равно: $a_{-1} + a_{-2}q^{-1} + a_{-3}q^{-2} + \ldots$.
Целая часть его равна a_{-1}, а дробная – $a_{-2}q^{-1} + a_{-3}q^{-2} + \ldots$
На втором этапе дробную часть умножаем на q. Целая часть последнего произведения равна a_{-2}.

Вычисления продолжаем до тех пор, пока ***дробная часть не будет равна нулю или не будет достигнута требуемая точность.*** Полученная последовательность цифр a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, ... будет определять число в системе счисления с основанием q.

$$A_{дд} = a_{-1}\, a_{-2}\, a_{-3} \ldots .$$

Разберем процесс преобразования на примере.

Пример 5. Перевести число $0{,}265625_{10}$ из десятичной системы счисления в восьмеричную систему счисления.
Решение
На первом этапе умножим дробь на основание новой системы $q = 8$.
$0{,}265625 \cdot 8 = 2{,}125$. Целая часть равна двум, а дробная часть – 0,125.
На втором этапе умножим дробную часть 0,125 на 8. Получим 1,0.
Дробная часть произведения равна нулю, а целая часть – 1.
Запишем алгоритм преобразования в виде таблицы.

Шаг	Дробная часть	Множитель (основание)	Целая часть произведения
1	0,265625	8	2
2	0,125	8	1

Запишем последовательность цифр от первого шага к второму: 21.
Ответ: $0{,}265625_{10} = 0{,}21_8$.

§3. Перевод чисел из десятичной системы счисления в произвольную. Перевод осуществляется в два этапа. Сначала по алгоритму, изложенному в первом параграфе, переводится целая часть числа. Затем по алгоритму, изложенному во втором параграфе, переводится дробная часть числа. Разберем это на примере.

Пример 6. Перевести число $120{,}3_{10}$ из десятичной системы счисления в шестнадцатиричную.

Решение

а) Переведем целую часть числа 120_{10}.

На первом этапе разделим 120 на 16. Целая часть равна 7, а остаток – 8. На втором этапе частное делим на 16. Целая часть равна нулю (7<16), а остаток равен 8. Вычисление завершено. Запишем его результаты в таблицу.

Шаг	Число/частное	Делитель (основание)	Целая часть деления
1	120	16	7
2	8	16	8

Запишем последовательность цифр от второго шага к первому: 87.

б) Переведем дробную часть $0{,}3_{10}$ в шестнадцатиричную систему счисления с точностью до четырех знаков. Это означает, что количество вычислений не должно превышать четыре. Запишем алгоритм вычислений в таблицу.

Шаг	Дробная часть	Множитель (основание)	Целая часть произведения
1	0,3	16	4
2	0,8	16	12=C
3	0,8	16	12=C
4	0,8	16	12=C

Запишем последовательность цифр от первого шага к второму: $4CCC$. Следовательно, $0{,}3_{10} = 0{,}4CCC_{16}$. Подведем итог: $120{,}3_{10} = 87{,}4CCC_{16}$.

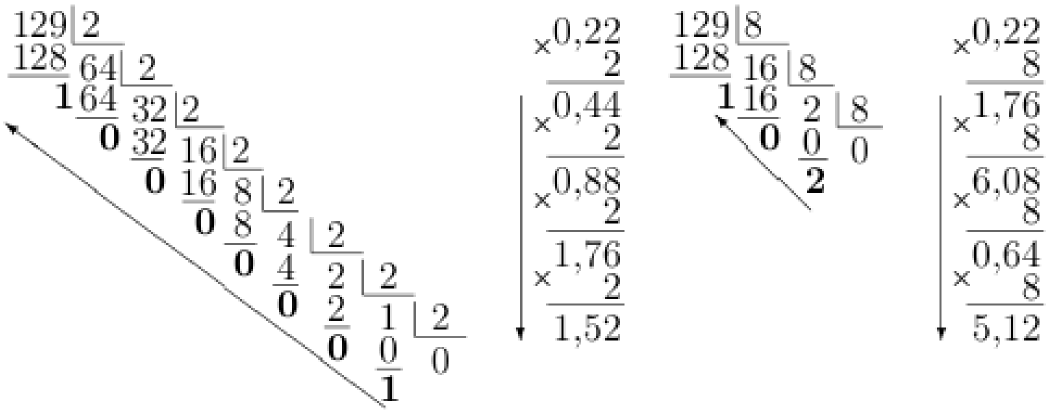
Ответ: $120{,}3_{10} = 87{,}4CCC_{16}$.

Рассмотрим на примере еще один способ записи алгоритма. Можно записать преобразование в виде деления и умножения в столбик [2]. Этот вид записи более привычен читателю со школы. Разберем его на примере.

Пример 7. Перевести число $129{,}22_{10}$ из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатиричную.

Решение.

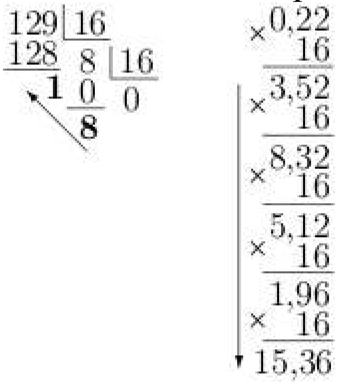
Переведем число $129{,}22_{10}$ в двоичную и восьмеричную системы счисления.



В двоичной и восьмеричной системах счисления

$$129{,}22 = 10000001{,}0011_2 = 201{,}1605_8.$$

Переведем число $129{,}22_{10}$ в шестнадцатиричную систему счисления.



В шестнадцатиричной системе счисления $129{,}22_{10} = 81{,}3851F_{16}$.

Ответ: $129{,}22_{10} = 10000001{,}0011_2 = 201{,}1605_8 = 81{,}3851F_{16}$.

Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатиричную систему и наоборот

§1. Перевод в восьмеричную систему счисления и наоборот. Из соотношения $2^3 = 8$ видно, что один разряд восьмеричной системы содержит три бита информации, а один разряд двоичной системы счисления содержит один бит информации. Таким образом, каждые три цифры в двоичной системе соответствуют одной цифре в восьмеричной системе счисления.

Для перевода целого числа из двоичной системы счисления в восьмеричную его цифры разбиваются на тройки справа налево, а затем каждую тройку преобразуют в одну цифру восьмеричной системы счисления. Для перевода будем пользоваться таблицей 1.

Пример 8. Перевести число 10110100_2 в восьмеричную систему счисления.

Решение

Сгруппируем цифры числа по тройкам $10110100_2 \rightarrow 10\ 110\ 100$. В последней левой группе не хватает одной цифры. Дополним эту пару цифр слева нулем. Тогда

$$10110100_2 = 010\ 110\ 100 = 264_8.$$

Согласно таблице 1 получаем:

$$010_2 = 2_8,\ 110_2 = 6_8,\ 100_2 = 4_8.$$

Ответ: $10110100_2 = 264_8$.

Дробную часть двоичной системы счисления переведем в восьмеричную, разбив слева направо цифры на тройки. Если в последней группе не хватает цифр до тройки, то справа добавляют нули. Разберем это на примере.

Пример 9. Перевести число $0{,}1101101_2$ в восьмеричную систему счисления.

Решение

Разобьём дробь на тройки $0,1101101_2 \rightarrow 0,110\ 110\ 1$. Справа добавим два нуля в последней группе $0,1101101_2 \rightarrow 0,110\ 110\ 100$.

Согласно таблице 1 получаем: $110_2 = 6$, $100_2 = 4$.

Итак $0,1101101_2 = 0,110\ 110\ 100 = 0,664_8$.

Ответ: $0,1101101_2 = 0,664_8$.

Перевод произвольного числа из двоичной системы счисления в восьмеричную начинается с разбиения его цифр на тройки, начиная от десятичной запятой. Целая и дробная части числа преобразуют точно так же, как описано ранее. Разберем это на примере.

Пример 10. Перевести число $110111,10001_2$ в восьмеричную систему счисления.

Решение

Разобьём цифры числа на тройки.

$$110111,10001_2 \rightarrow 110\ 111,\ 100\ 01 \rightarrow 110\ 111\ ,\ 100\ 010.$$

Согласно таблице 1 получаем:

$$110_2 = 6,\ 111_2 = 7,\ 100_2 = 4,\ 010 = 2.$$

Итак $110\ 111,\ 100\ 010 = 67,42_8$.

Ответ: $110111,10001_2 = 67,42_8$.

Перевод чисел из восьмеричной системы счисления в двоичную происходит по тем же правилам. Одной цифре восьмеричной системы соответствуют три цифры двоичной системы. Если цифр не хватает, то слева добавляют нули. Например, $1_8 = 001_2$; $2_8 = 010_2$; $3 = 011_2$.

Пример 11. Перевести число 52,7 из восьмеричной системы счисления в двоичную.

Решение

Согласно таблице 1 получаем: $5_8 = 101_2$, $2 = 10_2 = 010_2$, $7 = 111_2$.

Следовательно, $52,7_8 = 101010,111 = 101010,111_2$.

Ответ: $101011,111_2$.

§2. Перевод в шестнадцатиричную систему счисления и наоборот. Из соотношения $2^4 = 16$ видно, что одной цифре шестнадцатиричной системы счисления соответствуют четыре цифры двоичной системы счисления. Перевод происходит строго по аналогии с предыдущим параграфом с тем отличием, что для преобразований будем рассматривать четверки (квартеты) цифр.

Пример 12. Перевести число 1110110_2 из двоичной системы счисления в шестнадцатиричную.

Решение

Разобьём число справа налево на четверки:

$$1110110_2 \rightarrow 111\ 0110 \rightarrow 0111\ 0110.$$

Согласно таблице 1 получаем: $0111_2 = 111_2 = 7$, $0110_2 = 110_2 = 6$.

Тогда $1110110_2 = 76_{16}$.

Ответ: $1110110_2 = 76_{16}$.

При переводе дробной части числа точно так же разбиение на четверки (квартеты) цифр совершается слева направо, начиная от десятичной запятой (точки). Если в группе не хватает цифр до четырех, то справа добавляют нули.

Пример 13. Перевести дробь $0{,}1011111_2$ в шестнадцатиричную систему счисления.

Решение

Разобьём дробную часть на четверки:

$$0{,}1011111_2 \rightarrow 0{,}\ 1011\ 111 \rightarrow 0{,}\ 1011\ 1110.$$

Согласно таблице 1 имеем: $1011_2 = B_{16}$, $1110_2 = E_{16}$. Тогда $0{,}\ 1011\ 1110 = 0{,}BE_{16}$.

Ответ: $0{,}BE_{16}$.

По аналогии с восьмеричной системой счисления точно так же переводится число из двоичной системы счисления в шестнадцатиричную. Единственным отличием является то, что цифры группируются по четверкам.

Пример 14. Перевести число $1101100{,}101101_2$ в шестнадцатиричную систему счисления.

Решение

Разобьём число на квартеты, начиная от десятичной запятой:

$$1101100{,}101101_2 \rightarrow 110\ 1100{,}\ 1011\ 01 \rightarrow 0110\ 1100{,}\ 1011\ 0100.$$

Согласно таблице 1 получим: $0110_2 = 110_2 = 616$, $1100_2 = C_{16}$, $1011_2 = B_{16}$, $0100_2 =$ $= 100_2 = 4_{16}$. Тогда

$$0110\ 1100{,}\ 1011\ 0100 = 6\mathrm{C}{,}B4_{16}.$$

Ответ: $6\mathrm{C}{,}B4_{16}$.

При переводе произвольного числа из шестнадцатиричной системы счисления в двоичную каждую цифру заменяют четырьмя цифрами согласно таблице 1. Если в группе количество цифр меньше четырех, то слева добавляют нули. Например, $1_{16} = 0001_2$, $2_{16} = 0010_2$, $3_{16} = 0011_2$, $4_{16} = 0100_2$, $5_{16} = 0101_2$, $6_{16} = 0110_2$, $7_{16} = 0111_2$.

Пример 15. Перевести число $B2{,}6E_{16}$ из шестнадцатиричной системы счисления в двоичную.

Решение

Переведем каждую цифру в двоичную систему счисления согласно таблице 1. $B_{16} = 1011_2$, $2_{16} = 0010_2$, $6_{16} = 0110_2$, $E_{16} = 1110_2$.

Расположим группы цифр согласно разрядам цифр исходного числа:

$$B2{,}6E_{16} = 10110010{,}01101110_2.$$

Отбросим последний ноль. Это никак не повлияет на значение числа.
Ответ: $10110010{,}0110111_2$.

Упражнения

1. Перевести числа в десятичную систему счисления:

а) $57{,}4_8$; б) $102{,}4_8$; в) $10101{,}01_2$; г) $111101{,}1_2$; д) $OC{,}8_{16}$; е) $63,\ C_{16}$.

2. Перевести числа из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатиричную системы счисления:

а) 111; б) 0,125; в) 0,42; г) 94,25; д) 88,4.

3. Перевести числа из двоичной системы счисления в восьмеричную систему счисления:

а) 110101101_2; б) $0{,}1011101_2$; в) $10110111{,}10111_2$.

4. Перевести числа из восьмеричной системы счисления в двоичную систему счисления:

а) $34{,}1_8$; б) $72{,}17_8$.

5. Перевести числа из двоичной системы счисления в шестнадцатиричную систему счисления:

а) 1010111101_2; б) $0{,}10101101_2$; в) $1011010101{,}101011_2$.

6. Перевести числа из шестнадцатиричной системы счисления в двоичную систему счисления:

а) $A3{,}491_6$; б) $C2{,}5C_{16}$.

7. Расположить числа в порядке возрастания: 1110011_2, 46_8, 32_{10}, $2C_{16}$.

Арифметические операции в позиционных системах счисления

§1. Арифметические действия с числами в двоичной системе счисления. Запись чисел в двоичной системе счисления ограничена всего двумя символами: **0** и **1**. Запишем правила суммирования для двоичной системы счисления:

$$0_2 + 0_2 = 0_2;\ \ 0_2 + 1_2 = 1_2;\ \ 1_2 + 0_2 = 1_2;\ \ 1_2 + 1_2 = 10_2.$$

Разберем на примере применение этих правил. Для суммирования будем использовать метод в столбик.

Пример 16. Найти сумму чисел $1101_2 + 1011_2$; $11011{,}11_2 + 1101{,}01_2$.
Решение
Вычислим суммы этих чисел в столбик:

$$+\begin{array}{r} 1101_2 \\ 1011_2 \\ \hline 11000_2 \end{array} \qquad\qquad +\begin{array}{r} 11011{,}11_2 \\ 1101{,}01_2 \\ \hline 101001{,}00_2 \end{array}$$

Переведем эти числа в десятичную систему счисления:

$1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+4+0+1 = 13;$
$1011_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+0+2+1 = 11;$
$11000_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 16+8+0+0+0 = 24;$
$11011{,}11_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = 16+8+0+2+1+0{,}5+0{,}25 = 27{,}75;$
$1101{,}01_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = 8+4+0+1+0+0{,}25 = 13{,}25;$
$101001_2 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 32+0+8+0+0+1 = 41.$
Проверка: 13 + 11 = 24; 27,75 + 13,25 = 41.
Ответ: $1101_2 + 1011_2 = 11000_2$; $11011{,}11_2 + 1101{,}01_2 = 101001_2$.

Точно так же вычисляется разность между двумя числами в двоичной системы счисления:

$$1_2 - 0_2 = 1_2; \quad 10_2 - 1_2 = 1_2.$$

Рассмотрим применение этих правил на примере.

Пример 17. Вычислить разность между числами $11101_2 - 1111_2$ и $1{,}01101_2 - 0{,}1101_2$.
Решение
Вычислим разность этих чисел в столбик:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 11101_2 \\ 1111_2 \\ \hline 1110_2 \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} - \begin{array}{r} 1{,}01101_2 \\ 0{,}1101_2 \\ \hline 0{,}10011_2 \end{array} \end{array}$$

Переведем числа в десятичную систему счисления:
$11101_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 16+8+4+0+1 = 29;$
$1111_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+4+2+1 = 15;$
$1110_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 8+4+2+0 = 14;$
$1{,}01101_2 = 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 0\cdot 2^{-4} + 1\cdot 2^{-5} = 1+0+1/4+1/8+0+1/32= =45/32;$

$$0{,}1101_2 = 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{16} = \frac{8+4+1}{16} = \frac{13}{16};$$

$$0{,}10011_2 = 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} + 1\cdot 2^{-5} = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$$

$$= \frac{16+2+1}{32} = \frac{19}{32}.$$

Проверка: 29–15 = 14; 45/32–13/16 = (45–13 $\cdot$ 2)/32 = 19/32.
Ответ: 1110_2, $0{,}10011_2$.

Запишем правила умножения для двоичной системы счисления:

$$0_2 \cdot 0_2 = 0_2; \; 0_2 \cdot 1_2 = 0_2; \; 1_2 \cdot 0_2 = 0_2; \; 1_2 \cdot 1_2 = 1_2.$$

Рассмотрим применение этих правил на примере вычисления произведения двух чисел.

Пример 18. Вычислить произведение $111{,}1_2 \cdot 101_2$.

Решение

Вычислим это произведение в столбик:

$$\begin{array}{r} \times\ 111,1_2 \\ 101_2 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ \hline 100101,1_2 \end{array}$$

Переведем эти числа в десятичную систему счисления:

$111,1_2=1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}=4+2+1+0,5=7,5$;

$101_2=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=4+0+1=5$;

$100101,1_2=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}=32+0+0+4+0+1+0,5=37,5$.

Проверка: $7,5 \cdot 5 = 37,5$.

Ответ: $100101,1_2$.

§2. Арифметические действия с числами в восьмеричной и шестнадцатиричной системах счисления. Вспомним метод вычисления целых чисел в десятичной системе счисления. Найдем сумму 9 и 7. Их сумма больше 10 (основание системы счисления).

Тогда $9 + 7 = 9+(1 + 6) = 9 + 1 + 6 = 10 + 6 = 16$.

Точно так же работает правило и для других систем счисления. Например,

$$6_8 + 5_8 = 6_8 + (2_8 + 3_8) = 6_8 + 2_8 + 3_8 = 10_8 + 3_8 = 13_8.$$

Для шестнадцатиричной системы счисления суммирование проходит точно так же:

$$9_{16} + A_{16} = 9_{16} + (7_{16} + 3_{16}) = 9_{16} + 7_{16} + 3_{16} = 10_{16} + 3_{16} = 13_{16}.$$

Пример 19. Вычислить $245_8 + 76_8$.

Решение

Вычислим суммы этих чисел в столбик:

$$\begin{array}{r} +\ 245_8 \\ 76_8 \\ \hline 343_8 \end{array}$$

Разберем это более подробно. Нулевой разряд:

$$5_8 + 6_8 = 5_8 + (3_8 + 3_8) = 5_8 + 3_8 + 3_8 = 10_8 + 3_8 = 13_8.$$

Единицу переносим в следующий (первый) разряд. Первый разряд:

$$1_8 + 4_8 + 7_8 = 1_8 + 7_8 + 4_8 = 10_8 + 4_8 = 14_8.$$

Единицу переносим в следующий (второй) разряд. Второй разряд:

$$1_8 + 2_8 = 3_8.$$

Ответ: 343_8.

Пример 20. Вычислить $4BC_{16} + 5FE_{16}$.

Решение

Вычислим суммы этих чисел в столбик:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 4BC_{16} \\ 5FE_{16} \end{array} \\ \hline ABA_{16} \end{array}$$

Разберем это более подробно. Нулевой разряд:

$$C_{16} + E_{16} = C_{16} + (4_{16} + A_{16}) = C_{16} + 4_{16} + A_{16} = 10_{16} + A_{16} = 1A_{16}.$$

Единицу переносим в следующий (первый) разряд. Первый разряд:

$$1_{16} + B_{16} + F_{16} = C_{16} + (4_{16} + B_{16}) = C_{16} + 4_{16} + B_{16} = 10_{16} + B_{16} = 1B_{16}.$$

Единицу переносим в следующий (второй) разряд. Второй разряд:

$$1_{16} + 4_{16} + 5_{16} = A_{16}.$$

Переведем эти числа в десятичную систему счисления:

$4BC_{16} = 4 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 1024 + 176 + 12 = 1212;$

$5FE_{16} = 5 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 1280 + 240 + 14 = 1534;$

$ABA_{16} = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 2560 + 176 + 10 = 2746.$

Проверка: 1212 + 1534 = 2746.

Ответ: ABA_{16}.

Представление отрицательных целых чисел в процессоре

Для работы процессора с отрицательными целыми числами разработана специальная двоичная дополнительная арифметика. В двоичной дополнительной арифметике байт выражает числа от –128 до +127, то есть тоже 256 различных чисел.

Процессору о том, что число является отрицательным, говорит включенный (равный 1) старший бит. Если старший бит не включен (равен 0), то процессор считает число положительным. Например, $01100011_2 = 99_{10}$, а $11100101_2 = -27_{10}$. Такое представление чисел позволяет заметно ускорить выполнение арифметических операций сложения и вычитания.

Если число не попадает в промежуток [–128; 127], то для его записи отводят два байта (16 бит). В нем также старший бит отвечает за знак числа. Оставшиеся 15 бит позволяют получить числа от –32768 до +32767.

Число 11100101_2 записано в дополнительном коде. С этим понятием разберемся чуть позже. Покажем на примере, как такое представление ускоряет вычисления.

Пример 21. Просуммировать $01100011_2 = 99_{10}$ и $11100101_2 = -27_{10}$.

Решение

а) Найдем сумму в десятичной системе счисления: 99 + (–27) = 72.

б) Теперь в двоичной системе счисления:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} 01100011_2\ (99) \\ 11100101_2\ (-27) \end{array} \\ \hline 01001000_2 \end{array}$$

При сложении в старшем разряде получаем $1_2 + 0_2 + 1_2 = 10_2$. Поскольку единицу переносить некуда, то её отбрасываем.

в) Переведем полученную сумму из двоичной в десятичную систему счисления: $01001000_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 = 64 + 8 = 72$.

Ответ: $01001000_2 = 72_{10}$.

Замечание. *При сложении и вычитании чисел в однобайтовом (двухбайтовом и так далее) представлении цифры, которые не помещаются в отведенные биты (разряды), просто отбрасываются.*

Рассмотрим это на примере нижеприведенной задачи.

Пример 22. Вычислить сумму и разность чисел $48_{10} = 00110000_2$ и $-34_{10} = 11011110_2$.

Решение

Вычислим сумму (в скобках указано десятичное представление чисел):

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} 00110000_2\ (48) \\ 11011110_2\ (-34) \end{array} \\ \hline 00001110_2\ (14) \end{array} \qquad \begin{array}{r} - \begin{array}{l} 00110000_2\ (48) \\ 11011110_2\ (-34) \end{array} \\ \hline 01010010_2\ (82) \end{array}$$

Ответ: $00001110_2 = 14_{10}$ и $01010010_2 = 82_{10}$.

Из примера видно, что двоичная дополнительная арифметика позволяет процессору работать с отрицательными числами точно так же, как и с положительными.

Как же перевести отрицательное число из десятичной системы счисления к дополнительному коду числа? Делается это в несколько этапов:

1) вычисляется однобайтовое представление в двоичной системе счисления модуля числа;

2) изменяется значение старшего бита на единицу, то есть получаем прямой код отрицательного числа;

3) во всех битах, за исключением старшего бита, изменяются его значения. Единица заменяется нулем, а нуль – единицей. Таким образом, получается обратный код;

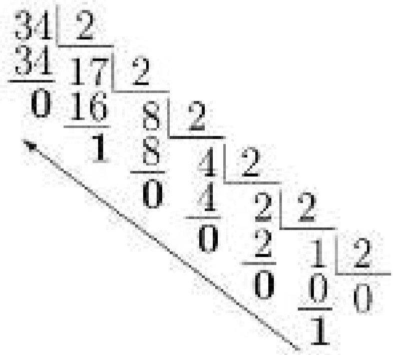
4) для получения дополнительного кода нужно к обратному коду прибавить единицу.

Пример 23. Перевести число -34_{10} из десятичной системы счисления в дополнительный код.

Решение

а) $|-34_{10}| = 34_{10}$.

б) Переведем 34_{10} в двоичную систему счисления:



Таким образом, 34 = 100010_2. В однобайтовом представлении добавляем слева (на месте старших битов) два нуля 34 = 00100010_2.
в) Для получения прямого кода изменим значение старшего бита на единицу: –34 = 10100010_2.
г) Изменим значения битов кроме старшего бита: –34 = 11011101_2. Это обратный код числа.
д) Прибавим к обратному коду единицу: $11011101_2 + 1_2 = 11011110_2$.
Ответ: –34 =11011110_2.

Пример 24. Перевести число 11001111_2 из дополнительного кода в десятичную систему счисления.
Решение
1) Перейдем в обратный код: $11001111_2 – 1_2 = 11001110_2$.
2) Перейдем в прямой код. Заменим в битах значения, кроме старшего бита, единицу на ноль, а ноль – на единицу: $11001110_2 \to 10110001_2$.
3) Отбросим старший бит числа в прямом коде: $10110001_2 \to 0110001_2$.
4) Переведем полученное число в десятичную систему счисления:

6 54 32 10
$0110001_2 = 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 20 = 32 + 16 + 1 = 49.$
Ответ: $11001111_2 = – 49_{10}$.

Упражнения

8. Выполнить арифметические действия:
а) $1110_2 + 1001_2$; б) $1110_2 – 1001_2$; в) $67_8 + 23_8$; г) $53_8 – 47_8$; д) $BF_{16} + CD_{16}$;
е) $196_{16} – AE_{16}$.
9. Выполнить арифметические действия:
а) $1101{,}01_2 + 1011{,}11_2$; б) $2{,}43_8 + 5{,}67_8$; в) $97{,}6_{16} + 89{,}5_{16}$; г) $54{,}3_{16} – 1D{,}E_{16}$; д) $62{,}3_8 – 34{,}7_8$.
10. Выполнить арифметические действия. Для проверки следует перевести все числа в десятичную систему счисления:
а) $1101_2 \cdot 101_2$; б) $34_8 \cdot 26_8$.
11. Перевести числа в дополнительный код:
а) – 37_{10}; б) $–48_{10}$; в) $–30_{10}$; г) $–55_{10}$.

12. Перевести числа из дополнительного кода в десятичную систему счисления:

а) 10101110_2; б) 11110001_2; в) 10011101_2; г) 11101010_2.

13*. Перевести число –259 в дополнительный код.

2. Количество информации

Синтактическая мера информации

Синтактическая мера количества информации оперирует обезличенной информацией, не выражающей смыслового отношения к объекту.

«Объём данных $V_Д$ в сообщении измеряется количеством символов (разрядов) в этом сообщении. В двоичной системе счисления единица измерения – бит. Бит является ***неделимой величиной,*** то есть нельзя сказать 1,5 бита, или 2/3 бит. ***Количество бит является целым числом»***[3].

Разберемся с понятием «информация». Пусть после получения некоторого сообщения β получатель приобретает некоторую дополнительную информацию $I_\beta(\alpha)$, уменьшая его априорную неосведомленность так, что апостеприорная (после получения сообщения β неопределенность состояния системы становится равной $H_\beta(\alpha)$.

«Тогда количество информации $I_\beta(\alpha)$ о системе, полученной в сообщении β, определяется так:

$$I_\beta(\alpha) = H_\beta(\alpha) - H_\beta(\alpha),$$

то есть количество информации измеряется изменением (уменьшением) неопределенности состояния системы» [3].

В 1928 г. американский инженер Р. Хартли предложил следующий научный подход к оценке сообщений (вычислению вероятности). Предложенная им формула вычисления количества информации в сообщении о том, что одно из равновероятных событий $\boldsymbol{N}$ произошло, имела следующий вид:

$$I = \log_2 \boldsymbol{N}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{N}$ – количество равновероятных событий;

$\boldsymbol{I}$ – количество бит в сообщении.

Тогда обратная формула будет следующей: $\boldsymbol{N} = 2^{\boldsymbol{I}}$.

Следует учитывать, что вероятность проявления одного события для каждого из них имеет одно и то же значение: $p = 1/N$.

Иногда формулу Хартли записывают так:

$$I = \log_2 N = \log_2 (1/p) = -\log_2 p. \tag{4}$$

Пример 25. Шарик находится в одной из трех урн: А, В или С. Определить, сколько бит информации содержит сообщение о том, что он находится в урне В.

Решение

Шарик может находиться в любой из урн. Вероятность нахождения в каждой из урн одна и та же. То есть имеются три равносильных события. Следовательно, такое сообщение содержит $I = \log_2 3 = 1{,}585 = 2$ бита информации.

Ответ: 2 бита.

Пример 26. В доме 8 этажей. Какое количество информации мы получим, узнав, что интересующий нас Иванов живет на втором этаже?

Решение

Поскольку заранее неизвестно, на каком этаже живет Иванов, то вероятности проживания на любом этаже равны между собой. Таким образом, имеются восемь равновероятностный событий. Следовательно, такое сообщение содержит $I = \log_2 8 = 3$ бита информации.

Ответ: 3 бита.

В 1948 г. американский инженер и математик К. Шеннон предложил формулу для вычисления количества информации для событий с различными вероятностями. Если I – количество информации, N –количество возможных событий, p_i – вероятности отдельных событий, то количество информации для событий с различными вероятностями можно определить по формуле

$$I = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}. \qquad (5)$$

Пример 27. Будем бросать несимметричную четырехгранную пирамиду. Определить количество информации, получаемое при реализации одного из событий (пирамида упала на какую-то грань).

Решение

Вероятность отдельных событий будет такова:

$$p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{4},\ p_3 = \frac{1}{8},\ p_4 = \frac{1}{8}.$$

Количество информации, получаемой после реализации одного из этих событий, рассчитывается по формуле Шеннона:

$$I = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{4}\cdot\log_2 4 + \frac{1}{8}\cdot\log_2 8 + \frac{1}{8}\cdot\log_2 8 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 3 = 1\frac{3}{4} = 2\text{бита}.$$

Ответ: 2 бита.

Формулу Хартли теперь можно рассматривать как частный случай формулы Шеннона:

$$I = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = -\log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N.$$

Помимо бита есть другие единицы измерения. В системе СИ в качестве единицы измерения информации принят байт. Он состоит из восьми бит, то есть **1 байт = 8 бит**. Кроме того, приняты следующие единицы измерения количества информации:

1 Кбайт (килобайт) = 1024 байт = 2^{10} байт;

1 Мбайт (мегабайт) = 1024 Кбайт = 2^{20} байт = 1048576 байт;

1 Гбайт (гигабайт) = 1024 Мбайт = 2^{30} байт = 1073741824 байт и т.д.

Кодирование символьных (текстовых и числовых) данных

С помощью двоичного кода кодируется символьная, т.е. текстовая и числовая информация, для чего используются специальные кодировочные таблицы.

Одна из первых таблиц – таблица кода ASCII. Она приведена в приложении А.

Код ASCII – American Standard Code for Information Interchange (стандартный код информационного обмена США), произносится как «эски». Он имеет базовую и расширенную таблицы кодирования: базовая – от 0 до 127; расширенная – от 128 до 255, т.е. всего 256 значений. Информационный объём одного символа равен:

$$I = \log_2 256 = 8 \text{ бит} = 1 \text{ байт}.$$

Кроме того, существуют и другие таблицы кодирования из 256 кодов. Например, koir-8, windows1251 и т.д.

Универсальная система кодирования текстовых данных, основанная не на восьми-, а на шестнадцатиразрядном (или двухбайтном) кодировании, называется Юникод (UNICODE). На основании такой таблицы может быть закодировано $N = 2^{16} = 65536$ символов.

Пример 28. Декодируйте с помощью кодировочной таблицы ASCII следующий текст, заданный шестнадцатиричным кодом:
82(130)A5(165)E7(231)AD(173)EB(235)A9(165)20(32)A7(167)AE(174)A2(162)

Решение

Декодируем с помощью таблицы ASCII это выражение.

Ответ: Вечный зов.

Упражнения

14. Какой объём имеет каждая буква русского алфавита?

15. Допустим, кто-то выбирает одну карту из колоды. Нас интересует, какую именно из 36 карт он достал:

а) Это карта красной масти.

б) Это карта пиковой масти.

в) Это одна из старших карт: валет, дама, король или туз.

г) Это одна карта из колоды.

д) Это дама пик.

16. Найти количество информации в компьютерном файле и написанной на бумаге фразе: «Я изучаю информатику».

17. При угадывании целого числа в диапазоне от 1 до N было получено 7 бит информации. Чему равно N?

18. Какой объем информации содержит страница текста, набранного с помощью компьютера, на которой 50 строк по 80 символов?

19. Мощность некоторого алфавита равна 128. Какой объем информации содержится на странице, в которой 80 строк по 60 символов в строке?

20. Сообщение занимает 3 страницы по 25 строк. В каждой строке записано по 60 символов. Сколько символов в использованном алфавите, если все сообщение содержит 1125 байтов?

21. Группа школьников пришла в бассейн, в котором 4 дорожки для плавания. Тренер сообщил, что группа будет плавать на дорожке номер 3. Сколько информации получили школьники из этого сообщения?

22. Сообщение перевели с одного языка на другой. Мощность первого языка равна 16 символам, а второго – 128 символам. Как изменится информационный объём сообщения?

23. Вероятности выпадения граней игрового кубика соответственно равны: $p_1 = 1/8$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/16$, $p_4 = 1/4$, $p_5 = 3/16$. Найти количество бит высказывания, что при броске кости выпадет какая-то грань, например «тройка».

24. Декодировать с помощью кодировочной таблицы ASCII следующие тексты, заданные шестнадцатиричным кодом:

а) 54(84) 6F(111) 72(114) 6E(110) 61(97) 64(100) 6F(111);

б) 49(73) 20(32) 6C(108) 6F(111) 76(118) 65(101) 20(32) 79(121) 6F(111) 75(117);

в) 32(50) 2A(42) 78(120) 2B(43) 79(121) 3D(61) 30(48).

Кодирование графической информации

Большую часть информации об окружающем мире человек воспринимает через органы зрения. Этот процесс называется визуализацией данных. Эти данные сохраняются на самые различные носители – бумагу, пленку, кальку, картон, холст, стекло, стену и т.д. Такую информацию принято называть *графической*.

Информация, получаемая человеком, является *аналоговой*. Для того чтобы ЭВМ могла работать с графической информацией, её нужно преобразовать в дискретную (цифровую) форму. Такое преобразование называют *дискретизацией* информации.

Определение 5. Графическая информация, полученная в таком виде, получила название ***компьютерной графики***.

Одним из самых простых методов дискретизации является представление изображения в виде матрицы, называемой растром.

Алгоритм дискретизации растровой графики

- Сначала определяется декартова система координат.
- Потом все изображение разбивается на малые квадраты, называемые **пикселями**.
- Определяется цвет каждого квадрата.

Каждый пиксель соответствует элементу матрицы. Его значение равно коду цвету пикселя. Чем больше цветовая палитра, то есть чем больше количество цветов, тем больше информационный объём одного пикселя. Количество цветов N определяется глубиной цвета (информационным объёмом). Глубина цвета каждого пикселя, зависящая от палитры (количества цветов), вычисляется по формуле Хартли (3). Например, в параметрах рабочего стола выставлено значение качества цветопередачи, равное 16 бит. Тогда по формуле Хартли палитра рабочего стола будет состоять из 2^{16} = 65536 цветов. ***Общий информационный объём*** **вычисляется как** ***произведение количества точек на глубину цвета***.

Пример 29. Определить глубину цвета в графическом режиме True Color, в котором палитра состоит из более чем 4 миллиардов (4 294 967 296) цветов.

Решение

Глубина цвета равна: $I = \log_2(4294967296) = 32$ бита.

Ответ: 32 бита.

Пример 30. Определить объем видеопамяти компьютера, который необходим для реализации графического режима монитора High Color с разрешающей способностью 1024×768 точек и палитрой из 65536 цветов.

Решение

Глубина цвета составляет: $I = \log_2(65536) = 16$ бит. Количество точек изображения равно: $K = 1024 \times 768 = 786432$. Требуемый объем видеопамяти равен:

$V = K \cdot I = 786432 \cdot 16$ бит = 12582912 бит = 12582912/8 байт = 1572864 байт.

$$V = \frac{1572864}{1024}\ \text{Кб} = 1536\ \text{Кб} = \frac{1536}{1024}\text{Мб} = 1{,}5\ \text{Мб}.$$

Ответ: 1,5 Мб.

Пример 31. Определить максимально возможную разрешающую способность экрана для монитора с диагональю 15 дюймов и размером точки экрана 0,28 мм.

Решение

Выразим размер диагонали в сантиметрах: c = 2,54 см · 15 = 38,1 см.

Определим соотношение между высотой и шириной экрана для режима 1024 × 768 точек. 768/1024 = 0,75. Определим ширину экрана. Пусть ширина экрана равна a, тогда высота равна $b = 0{,}75a$. По теореме Пифагора имеем:

$$a^2 + (0{,}75 \cdot a)^2 = 38{,}1^2,$$
$$1{,}5625 \cdot a^2 = 1451{,}61,$$
$$a^2 = 929{,}0304,$$
$$a = \sqrt{929{,}0304} = 30{,}48 \text{ см}.$$

Количество точек по ширине экрана равно: 304,8 мм/ 0,28 мм = 1089.

Максимально возможным разрешением экрана монитора является 1024 × 768.

Ответ: 1024 × 768.

Упражнения

25. Определить количество цветов в палитре при глубине цвета 4, 8, 24 бита.

26. Черно-белое (без градаций серого) растровое графическое изображение имеет размер 16×16 точек. Какой объем памяти займет это изображение?

27. Цветное (с палитрой из 256 цветов) растровое графическое изображение имеет размер 256×128 точек. Какой объем памяти займет это изображение?

28. В процессе преобразования растрового графического изображения количество цветов уменьшилось с 65536 до 16. Во сколько раз уменьшится объем занимаемой им памяти?

29. В процессе преобразования растрового графического изображения количество цветов увеличилось с 16 до 4 294 967 296. Во сколько раз увеличился объем, занимаемый им в памяти?

30. 256-цветный рисунок содержит 120 байт информации. Из скольких точек он состоит?

3. Логические основы ЭВМ

Одним из основных элементов ЭВМ является арифметико-логическое устройство (АЛУ). Его работа опирается на математический аппарат алгебры логики, или булевой алгебры. Он же используется для решения ряда задач.

Определение 6. ***Алгебра логики*** (булева алгебра) – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Основным понятием алгебры логики являются логические высказывания.

Определение 7. Под ***логическим высказыванием*** понимают повествовательное предложение, про которое можно сказать, что оно истинно или ложно в данных условиях места и времени.

Логические высказывания могут принимать только одно из двух значений: ***Истина*** *(True)* или ***Ложь*** *(False).*

Рассмотрим несколько предложений.

1. Планета Земля вращается вокруг Солнца.
2. В сутках 25 часов.
3. Число 2 является решением уравнения $5x = 10$.
4. Сколько времени?
5. Мир, труд, май!

Предложения 1, 2, 3 являются высказываниями, а 4, 5 не являются высказываниями, причем 1, 3 истинны, а 2 – ложно.

Определение 8. Высказывание, которое представляет одно утверждение, принято называть ***простым*** или ***элементарным***.

Простые высказывания обычно обозначают латинскими буквами, а их истинность – единицей, ложность – нулём соответственно. Если высказывание x истинно, то будем писать $x = 1$, если x ложно, то $x = 0$.

Определение 9. Высказывание, которое получается из элементарных высказываний с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда», принято называть ***сложным*** или ***составным***.

Значение сложного высказывания (логической функции) можно определить с помощью таблицы истинности.

Определение 10. ***Таблица истинности*** – это таблица, в которой перечислены все возможные значения входящих логических переменных и соответствующие им значения функции.

Простые логические высказывания объединяют в сложные при помощи логических операций.

3.1. ***Логические операции над высказываниями. Отрицание. Конъюнкция. Дизъюнкция. Импликация. Эквиваленция***

Определение 11. ***Отрицанием***, или ***инверсией*** высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания $\boldsymbol{a}$ обозначается $\bar{\boldsymbol{a}}$, или $\boldsymbol{a}$ и читается «не $\boldsymbol{a}$» или «неверно, что $\boldsymbol{a}$».

Таблица истинности отрицания (инверсии)

a	a ($\bar{a}$)
0	1
1	0

Утверждение 2. Двойное отрицание логического высказывания есть само высказывание,

$$\bar{\bar{x}} = x.$$

Например, отрицанием (инверсией) простого высказывания «Луна вращается вокруг земли» является высказывание «Луна не вращается вокруг Земли». Построим двойное отрицание простого высказывания «лев является хищником». Его инверсией является высказывание «лев не является хищником». Инверсией последнего высказывания является высказывание «неверно, что лев не является хищником».

Определение 12. ***Конъюнкцией***, или ***логическим умножением*** двух высказываний *x, y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *x, y* истинные, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний ж, *y* обозначается символом $x \wedge y$, или $x \cdot y$, или $x \& y$. Читается «*x* и *y*».

Таблица истинности конъюнкции

x	y	$x \wedge y$ ($x \cdot y$)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример 32. Построить конъюнкцию простых высказываний «10 делится на 5», «10 делится на 2».

Решение

Для создания сложного высказывания будем использовать союз «и». Новое высказывание будет следующим: «10 делится на 5, и 10 делится на 2». *Ответ:* «10 делится на 5 и на 2».

Определение 13. ***Дизъюнкцией***, или ***логическим сложением*** двух высказываний *x* и *y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний *x*, *y* истинно, и ложным, если они оба ложны.

Обозначается дизъюнкция символом $x \vee y$, или $x + y$. Читается «*x* или *y*».

Таблица истинности дизъюнкции

x	y	$x \vee y \quad (x + y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример 33. Построить дизъюнкцию простых высказываний «на светофоре горит зеленый цвет», «на светофоре горит красный цвет».
Решение
Для создания сложного высказывания будем использовать союз «или». Новое высказывание будет следующим: «На светофоре горит зеленый цвет, или на светофоре горит красный цвет».
Ответ: «На светофоре горит зеленый или красный цвет».

Утверждение 3. Из определений операций сложения и отрицания следует, что высказывание $\bar{x} \vee x$ всегда истинно, то есть

$$\bar{x} \vee x = 1.$$

Определение 14. ***Импликацией*** двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация x, y обозначается символами $x \rightarrow y$ или $x \Rightarrow y$. Читается «если x, то y» или «из x следует y».

Таблица истинности импликации

x	y	$x \rightarrow y \ (x \Rightarrow y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример 34. Построить импликацию простых высказываний «18 делится на 9», «18 делится на 3».
Решение
Для построения импликации будем использовать грамматическую связку «если ..., то ...». Новое высказывание будет следующим: «Если 18 делится на 9, то 18 делится на 3».
Ответ: «Если 18 делится на 9, то 18 делится на 3».

Определение 15. Высказывание x называют ***условием*** или ***посылкой***, высказывание y – ***следствием*** или ***заключением***.

<u>Определение 16.</u> ***Эквиваленцией*** или ***эквивалентностью*** двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое истинно, если оба высказывания x, y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложны во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний обозначается $x \leftrightarrow y$ или $x \Leftrightarrow y$, или $x \sim y$. Читается «x тогда и только тогда, когда y» или «для того чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y».

Таблица истинности эквиваленции

x	y	$x \leftrightarrow y$ ($x \Leftrightarrow y$)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример 35. Постройте эквиваленцию простых высказываний «число делится на три», «сумма цифр делится на три».

Решение

Для построения эквиваленции будем использовать грамматическую связку «тогда и только тогда, когда». Новое высказывание будет следующим: «Число делится на три тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на три».

Ответ: «Число делится на три тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на три».

Порядок выполнения логических операций

1) отрицание (инверсия);
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция;
4) импликация;
5) эквивалентность.

Утверждение 4. Изменить порядок выполнения можно с помощью расстановки скобок.

Упражнения

31. Определить, какие предложения являются высказываниями, и установить, истинные ли они или ложные:

а) Река Дон впадает в Черное море.
б) Пейте, дети, молоко!
в) Как пройти к вокзалу?
г) Сорок больше пятнадцати.
д) Трава зеленая.

32. Среди нижеуказанных высказываний указать элементарные и составные:

а) Задачу решили Аня и Леша.

б) Вечером я иду в театр.

в) Вечером на улице сильный и холодный ветер.

г) Если не готовиться к контрольной работе, то её можно не сдать.

33. Пусть высказывание *a:* «На улице идет дождь», высказывание *b:* «На улице светит солнце». Дать вербальную (словесную) формулировку высказываний:

а) a; б) $a \vee b$; в) $a \wedge b$; г) $a \to \bar{b}$; д) $a \leftrightarrow b$.

34. Определить логические значения сложных высказываний:

а) $(\overline{x \vee y}) \wedge x \vee y$, при $x = 0$, $y = 1$; б) $x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y$, при $x = 1$, $y = 1$.

35. Найти значения логических высказываний x и y, при которых составное высказывание $(x \to y) \to y$ является ложным.

36. Построить таблицу истинности:

а) $\bar{a} \vee \bar{b}$; б) $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \to z)$.

37. Построить таблицу истинности:

а) $\overline{\bar{x} \wedge y} \vee (\bar{y} \wedge x)$;

б) $z + x \& \bar{y} + z \vee \bar{y}$;

в) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

г) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to z)$;

д) $(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \bar{y})$;

е) $\big((p \wedge q) \Leftrightarrow q\big) \Leftrightarrow (q \to p)$;

ж) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$;

з) $(a \to \bar{b}) \to (\overline{a \vee b} \Leftrightarrow \bar{c})$;

и) $x \Leftrightarrow z \wedge \bar{y} \to x \vee z$;

к) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)$.

38. Построить таблицу истинности:

а) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \wedge (a \to c))$; б) $\overline{\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \wedge y}}}$.

3.2. *Формулы алгебры логики. Основные равносильности*

<u>Определение 17</u>. ***Формулой алгебры логики*** называется сложное высказывание, которое получено из простых высказываний с помощью логических операций.

<u>Определение 18</u>. Формула A называется ***тождественно истинной,*** или *тавтологией,* если она принимает значение 1 (Истина) при всех значениях входящих в нее элементарных высказываний.

<u>Определение 19</u>. Формула A называется ***тождественно ложной,*** если она принимает значение 0 (Ложь) при всех значениях входящих в нее элементарных высказываний.

Пример 36. Показать, что высказывание является тавтологией.

$$f(x, y) = x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

Решение

Составим таблицу истинности:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \wedge y$	$\bar{x} \wedge y$	$x \wedge \bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$f(x, y)$
0	0	1	1	0	0	0	1	**1**
0	1	1	0	0	1	0	0	**1**
1	0	0	1	0	0	1	0	**1**
1	1	0	0	1	0	0	0	**1**

Для любых значений переменных (простых высказываний) сложное высказывание $f(x, y)$ имеет значение 1 (Истина). Следовательно, оно является тавтологией.
Ответ: Высказывание является тавтологией.

Определение 20. Две формулы A и B называются ***равносильными***, если они принимают одно логическое значение при определенном наборе значений входящих в эти формулы элементарных высказываний.

Обозначается символом «≡». Доказывают равносильность формул, как правило, построением таблиц истинности каждой формулы. Для этого необходимо, чтобы в формулы входили одни и те же переменные (простые высказывания). Однако количество переменных в формулах может быть различным. Например, $(x \wedge \bar{x}) \vee y \equiv y$.

Пример 37. Доказать равносильность формул $\overline{x \vee y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y}$.
Доказательство
Построим таблицу истинности первой формулы:

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Построим таблицу истинности второй формулы:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Получили одинаковые значения для обеих формул алгебры логики. Доказательство закончено: $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.

Равносильности алгебры логики можно разбить на три основные группы.

Основные равносильности

1) $x \vee x \equiv x$;
2) $x \wedge x \equiv x$;
3) $x \vee 1 \equiv 1$;
4) $x \wedge 1 \equiv x$;
5) $x \vee 0 \equiv x$;
6) $x \wedge 0 \equiv 0$;
7) $x \vee \bar{x} \equiv 1$ – закон исключения третьего;
8) $x \wedge \bar{x} \equiv 0$ – закон противоречия;
9) $\bar{\bar{x}} \equiv x$ – закон снятия двойного отрицания;
10) $x \wedge (x \vee y) \equiv x$ – закон поглощения;
11) $x \vee (x \wedge y) \equiv x$ – закон поглощения.

Равносильности, которые выражают одни логические операции через другие

12) $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \vee (y \to x)$;
13) $x \leftrightarrow y \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$;
14) $x \leftrightarrow y \equiv x \wedge y \vee \overline{x \wedge y}$;
15) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$;

Законы де Моргана:

16) $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$;
17) $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$.

Равносильности этой группы показывают справедливость нижеприведенной теоремы.

Теорема 1. Любую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только логические операции: инверсия, конъюнкция и дизъюнкция.

Основные законы алгебры логики

18) $x \vee y \equiv y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции;
19) $x \wedge y \equiv y \wedge x$ – коммутативность конъюнкции;
20) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции;
21) $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ – ассоциативность конъюнкции;
22) $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции;
23) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ –дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.

Покажем применение этих равносильностей для упрощения формул алгебры логики.

Пример 38. Упростить формулу алгебры логики $(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y$.

Решение

Преобразуем формулу в скобках согласно равносильности 15:

$$\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee \bar{y} \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \vee \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Согласно равносильности 9: $\overline{\overline{x \vee y}} \equiv x \vee y$.

Итак, $(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y \equiv (\overline{\overline{x \vee y}} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y \equiv (x \vee y \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y \equiv$.
$\equiv (x \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{y}) \wedge y \equiv$. Согласно равносильности 7: $x \vee \bar{x} \equiv 1$ и $y \vee \bar{y} \equiv 1$.

Ответ: $(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y \equiv y$.

Пример 39. Упростить формулу алгебры логики $\overline{x \wedge y \vee \bar{y} \wedge x}$.

Решение

Используя равносильности 23, 7, 4, преобразуем формулу:

$\overline{x \wedge y \vee \bar{y} \wedge x} \equiv \overline{x \wedge (y \vee \bar{y})} \equiv \overline{x \wedge 1} \equiv \bar{x}$..

Рассмотрим еще один способ преобразования исходной формулы. Для этого используем равносильности 16, 17, 9, 21, 2, 8, 18, 7, 1.

$\overline{x \wedge y \vee \bar{y} \wedge x} \equiv \overline{x \wedge y} \wedge \overline{\bar{y} \wedge x} \equiv (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{x}) \equiv$.
$\bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{x} \vee \bar{y} \wedge y \vee \bar{y} \wedge \bar{x} \equiv \bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \vee 0 \vee \bar{y} \wedge \bar{x} \equiv \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \wedge \bar{x} \vee \bar{x} \vee 0 \equiv$
$\bar{x} \wedge (y \vee \bar{y}) \vee \bar{x} \equiv \bar{x} \wedge 1 \vee \bar{x} \equiv \bar{x} \vee \bar{x} \equiv \bar{x}$.

Ответ: $\overline{x \wedge y \vee \bar{y} \wedge x} \equiv \bar{x}$.

Применение математической логики к решению логических задач

Алгебру логики можно применять к решению логических задач. Для этого условие конкретной задачи нужно записать в виде формулы алгебры логики. Затем упростить её с помощью равносильных преобразований. Простейший вид формулы позволяет, как правило, дать ответы на все поставленные вопросы в задаче.

Рассмотрим методику решения задач на конкретных примерах.

Пример 40. Четыре студентки – Мария, Нина, Ольга и Полина – участвовали в соревновании и заняли четыре призовых места. Когда стали узнавать, как распределились места, получили три разных ответа:

1) Ольга первая, Нина вторая;
2) Ольга вторая, Полина третья;
3) Мария вторая, Полина четвертая.

Известно, что в каждом ответе по крайней мере одна часть верна. Определите правильное распределение мест.

Решение

Для удобства обозначим высказывание большими латинскими буквами с индексом внизу, где буква является первой буквой имени участника, индекс – номер места, которое он занял в соревновании. Рассмотрим шесть элементарных высказываний:

1) O_1– Ольга первая;
2) N_2 – Нина вторая;
3) O_2 – Ольга вторая;
4) P_3 – Полина третья;
5) M_2 – Марина вторая;
6) P_4 – Полина четвертая.

Связаны они между собой по условию задачи утверждением, что у каждой пары высказываний (O_1, N_2), (O_2, P_3), (M_2, P_4) хотя бы одно является истинным. Значит, справедливы равносильности:

$$O_1 \vee N_2 \equiv 1,\ O_2 \vee P_3 \equiv 1,\ M_2 \vee P_4 \equiv 1.$$

Тогда конъюнкция трех сложных высказываний будет истинна:

$$(O_1 \vee N_2) \wedge (O_2 \vee P_3) \wedge (M_2 \vee P_4) \equiv 1. \qquad (6)$$

Упростим левую часть равенства. Для этого раскроем первые и вторые скобки:

$$(O_1 \wedge O_2 \vee O_1 \wedge P_3 \vee N_2 \wedge O_2 \vee N_2 \wedge P_3) \wedge (M_2 \vee P_4) \equiv 1. \qquad (7)$$

Так как по смыслу задачи $O_1 \wedge O_2 \equiv 0$, $N_2 \wedge O_2 \equiv 0$, то можно записать:

$$(0 \vee O_1 \wedge P_3 \vee 0 \vee N_2 \wedge P_3) \wedge (M_2 \vee P_4) \equiv 1,$$

или $(O_1 \wedge P_3 \vee N_2 \wedge P_3) \wedge (M_2 \vee P_4) \equiv 1.$

Далее по равносильности 23 имеем:

$$O_1 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee O_1 \wedge P_3 \wedge P_4 \vee N_2 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee N_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \equiv 1.$$

Так как $P_3 \wedge P_4 \equiv 0$, то согласно равносильности 6

$$O_1 \wedge P_3 \wedge P_4 \equiv 0 \text{ и } N_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \equiv 0.$$

Тогда равенство (7) принимает вид:

$$O_1 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee 0 \vee N_2 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee 0 \equiv 1.$$

Вынесем за скобки $P_3 \wedge M_2$ согласно равносильности 23:

$$P_3 \wedge M_2 \wedge (O_1 \vee N_2) \equiv 1.$$

Конъюнкция истинна, если $P_3 \equiv 1$, $M_2 \equiv 1$, $O_1 \vee N_2 \equiv 1$. Отсюда делаем вывод: $P_3 \equiv 1$, $M_2 \equiv 1$, $O_1 \equiv 1$, $N_2 \equiv 0$.

Ответ: Полина третья, Марина вторая, Оля первая. Значит, Нина четвертая.

Решение логических задач можно проводить, используя таблицу истинности формулы, которая будет составлена по условию. Эта таблица поможет ответить на поставленные вопросы.

Пример 41. По подозрению в совершении преступления задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой был малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом ложь. Вот что они утверждали:

Браун: «Я совершил это. Джон не виноват».
Джон: «Браун не виноват. Преступление совершил Смит».
Смит: «Я не виноват, виновен Браун».

Решение

Обозначим высказывания:

B – виноват Браун;

D – виноват Джон;

C – виноват Смит.

Сразу отметим, что из этих трех высказываний только одно принимает истинное значение. Значит,

$$B \wedge C \equiv 0,\ B \wedge D \equiv 0,\ C \wedge D \equiv 0. \quad (8)$$

По утверждениям задержанных составим три сложных высказывания:

$$B \wedge \bar{D};\quad \bar{B} \wedge C;\quad \bar{C} \wedge B.$$

Из условия задачи известно, что у этих трех конъюнкций одна истинна, а две ложны. Составим формулу

$$A = B \wedge \bar{D} \vee \bar{B} \wedge C \vee \bar{C} \wedge B.$$

Таблица истинности этой формулы имеет вид:

B	D	C	$\bar{B}$	$\bar{D}$	$\bar{C}$	$B \wedge \bar{D}$	$\bar{B} \wedge C$	$\bar{C} \wedge B$	A
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Из последнего столбца видно, что формула А принимает истинное значение в пяти случаях: во второй, третьей, четвертой, пятой и седьмой строках. Так как только одна из трех конъюнкций истинна по условию задачи, то пятую строку следует исключить из рассмотрения. Все остальные строки, кроме седьмой, не удовлетворяют равенствам (8). Остается только седьмая строка. Значит,

$$B = 0;\ D = 0;\ C = 1.$$

Следовательно, Смит – преступник. Его оба выказывания ложны. Рассмотрим значения высказываний Брауна и Джона соответственно:

Отсюда сделаем вывод, что Джон – уважаемый в городе старик, а Браун – малоизвестный чиновник.

Ответ: Браун – малоизвестный чиновник, Джон – уважаемый в городе старик, Смит – преступник.

Упражнения

39. Доказать равносильности:

а) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$; б) $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$; в) $x \Leftrightarrow y \equiv x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$;

г) $x + y \& z \equiv (x + y) \& (x + z)$.

40. Упростить формулу $\overline{x \wedge y \vee \bar{y} \wedge x}$.

41. Упростить формулу:

а) $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$;

б) $x \to (x \to y)$;

в) $((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee z \wedge \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z)$;

г) $(x \wedge \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge \bar{z}$;

д) $x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$;

е) $\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee (x \to y) \wedge x$;

ж) $A \wedge B \vee A \wedge (\bar{B} \vee C) \vee A \wedge \bar{D} \vee A$;

з) $(x \Leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$.

42. В школе четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-й, 8-й, 9-й и 10-й классы. При проверке оказалось, что 10-й класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили следующее:

1) Андреев: «Я убирал 9-й класс, а Савельев – 7-й».
2) Костин: «Я убирал 9-й класс, а Андреев – 8-й».
3) Савельев: «Я убирал 8-й класс, а Костин – 10-й».

Давыдов уже ушел домой. Какой класс убирал каждый ученик, если в одном из двух своих высказываний говорил правду, а во втором ложь?

43. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что изучал третий, то изучал и второй». Кто изучал математическую логику?

Литература

1. Угринович, Н.Д. Практикум по информатике и информационным технологиям: учебное пособие для общеобразовательных учреждений / Н.Д. Угринович, Л.Л. Босова, Н.И. Михайлова. – Изд. 2-е, испр. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004 – 394 с.: ил.
2. Руденко, Н.Б. Информатика: Понятие информации. Общая характеристика процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации. Позиционные системы счисления. Количество информации. Логические основы работы компьютера: методические указания / Н.Б. Руденко, Н.Н. Грачева, В.Н. Литвинов. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВПО Донской ГАУ, 2015. – 58 с.
3. Макарова, Н.В. Информатика: учебник для вузов / Н.В. Макарова, В.Б. Волков. – СПб.: Питер, 2011. – 576 с.
4. Информатика: учебное пособие для студентов факультета среднего профессионального образования / Н.Б. Руденко, Н.Н. Грачева, В.Н. Литвинов, Т.В. Жидченко, А.А. Емелин, А.П. Жогалев. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2017. – 223 с.
5. Информатика. 10 класс: учебник для общеобразовательных организаций: общий и углубл. уровни / А.Г. Гейн, А.Б. Ливчак, А.И. Сенокосов, Н.А. Юнерман. – М.: Просвещение, 2014. – 272 с.
6. Шаповалова, Л.Н. Дискретная математика. Математическая логика: учебное пособие/ Л.Н. Шаповалова, В.В. Серёгина. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2015. – 69 с.
7. Лихтярников, Л.М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения: учебное пособие/ Л.М. Лихтярников, Т.Г. Сухачева. – СПб.: Лань, 2009. – 288 с.

Ответы

1. а) 47,5; б) 66,5; в) 21,25; г) 61,5; д) 220,5; е) 99,75.
2. а) $111_{10} = 1101111_2 = 157_8 = 6F_{16}$; б) $0,125_{10} = 0,001_2 = 0,1_8 = 0,2_{16}$; в) $0,42_{10} = 0,011011_2 = 0,32702_8 = 0,6B851_{16}$; г) $94,25_{10} = 1011110,01_2 = 136,2_8 = 5E,4_{16}$; д) $88,4_{10} = 1010100,011_2 = 124,31463_8 = 54,6666_{16}$.
3. а) 655_8; б) $0,564_8$; в) $267,56_8$.
4. а) $11100,001_2$; б) $111010,001111_2$.
5. а) $2BD_{16}$; б) $0,AD_{16}$; в) $2D5,AC_{16}$.
6. а) $10100011,01001001_2$; б) $11000010,010111_2$.
7. 32_{10}, 46_8, $2C_{16}$, 1110011_2. ***Примечание.*** *Сначала переведите числа в одну систему счисления.*
8. а) 10111_2; б) 101_2; в) 111_2; г) 4_8; д) $18C_{16}$; е) $E8_{16}$.
9. а) 11001_2; б) $10,32_8$; в) $120,B_{16}$; г) $36,51_6$; д) $25,4_8$.
10. а) $1101_2(13_{10}) \cdot 101_2(5_{10}) = 1000001_2(65_{10})$; б) $34_8(28_{10}) \cdot 26_8(22_{10}) = 1105_8(616_{10})$.
11. а) 11011011_2; б) 11010000_2; в) 11100010_2; г) 11001001_2.
12. а) -82_{10}; б) -15_{10}; в) -99_{10}; г) -22_{10}.
13. 1111111011111101_2.
14. Так как $\log_2 33 \approx 5,044$, то I= 6 бит.
15. а) 1 бит; б) 2 бита; в) 2 бита; г) 0 бит; д) 6 бит.
16. На бумаге – 6 бит. Объём компьютерного файла равен 8 бит=1 байт.
17. N=128.
18. V = 4000 байт=3,9 Кб (килобайт).
19. V = 4200 байт=4,1 Кб (килобайт).
20. 4 символа.
21. 2 бита.
22. Увеличится в 1,75 раза.
23. $p_1 \log\frac{1}{p_1} + p_2 \log\frac{1}{p_2} + p_3 \log\frac{1}{p_3} + p_4 \log\frac{1}{p_4} + p_5 \log\frac{1}{p_5} = 2,01782.$

То есть I = 3 бита.

24. а) Tornado; б) I love you; в) Жизнь удалась.
25. 16, 256 16777216 цветов.
26. 256 бита=32 байта.
27. 32 килобайта.
28. Память уменьшится в четыре раза.
29. Объём увеличится в восемь раз.
30. Рисунок состоит из 120 точек. Можно предположить, что 10×12.
31. а) ложное высказывание; б) не высказывание, так как предложение является восклицательным; в) не высказывание, так как предложение является вопросительным; г) истинное высказывание; д) истинное высказывание.
32. а) составное высказывание, использован союз «и»; б) простое высказывание; в) составное высказывание, использован союз «и»; г) составное высказывание, использована грамматическая связка «если ..., то ...».

33. а) $\bar{a}$ =«На улице не идет дождь»;
б) $a \vee b$=«На улице идет дождь или светит солнце»;
в) $\bar{a} \wedge b$=«На улице не идет дождь и светит солнце»;
г) $a \Leftarrow \bar{b}$=«Если на улице идет дождь, то не светит солнце»;
д) $a \Leftrightarrow b$ = «На улице идет дождь тогда и только тогда, когда светит солнце».
34. а) 1; б) 0.
35. $x = 0, y = 0$.
36.
а)

a	b	$\bar{a} \vee \bar{b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

б)

x	y	z	$(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \to z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

37.
а)

x	y	$\overline{\bar{x} \wedge y} \vee (\bar{y} \wedge x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

б)

x	y	z	$z + x\&\bar{y} + z\&\bar{y}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

в)

x	y	$(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

г)

x	y	z	$x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

д)

x	y	z	$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \bar{y})$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

е)

p	q	$((p \wedge q) \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \to p)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ж)

p	q	r	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

з)

a	b	c	$(a \to \bar{b}) \to (\overline{a \vee b} \Leftrightarrow \bar{c})$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

и)

x	y	z	$x \Leftrightarrow z \wedge \bar{y} \to x \vee z$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Значения составного высказывания полностью совпадают со значения переменной x.

к)

a	b	c	$(a \Leftrightarrow \bar{b}) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow c)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

38.

а)

a	b	c	$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \wedge (a \to c))$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

б)

x	y	$\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \wedge y}}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

39. Для доказательства равносильности нужно построить таблицы истинности для левой и правой части равносильности.

40. *Решение*

Упростить двумя способами.

<u>1-й способ.</u> Сначала воспользуемся равносильностью 23, а затем 7 и 4.

$$\overline{x \wedge y \vee \bar{y} \wedge x} \equiv \overline{x \wedge (y \vee \bar{y})} \equiv \overline{x \wedge 1} \equiv \bar{x}.$$

<u>2-й способ.</u> Нужно воспользоваться равносильностями 16, 17, 9, 23, 2, 8, 5, 7.

$\overline{x \wedge y \vee \bar{y} \wedge x} \equiv \overline{x \wedge y} \wedge \overline{\bar{y} \wedge x} \equiv (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{x}) \equiv$
$\equiv \bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{x} \vee \bar{y} \wedge y \vee \bar{y} \wedge \bar{x} \equiv \bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \vee 0 \vee \bar{y} \wedge \bar{x} \equiv \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \wedge \bar{x} \vee \bar{x} \equiv$
$\equiv \bar{x} \wedge (y \vee \bar{y}) \vee \bar{x} \equiv \bar{x} \wedge 1 \vee \bar{x} \equiv \bar{x} \vee \bar{x} \equiv \bar{x}.$

Ответ: $\bar{x}$.

41. а) $\bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge y$; б) $\bar{x} \vee y$; в) $\bar{y} \vee \bar{x} \wedge z$; г) 0; д) $x \wedge y \vee \bar{x}$; е) $x \vee y$; ж) A; з) $\bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$.

42. 7-й класс убирал Савельев. 8-й класс убирал Андреев. 9-й класс убирал Давыдов. 10-й класс убирал Костин.

43. *Решение*

Сформулируем простые высказывания:

a = «Первый студент изучает математическую логику»;

b = «Второй студент изучает математическую логику»;

c = «Третий студент изучает математическую логику».

Из условий задачи следует, что $a \wedge b = 0$; $a \wedge c = 0$; $b \wedge c = 0$. Формализуем ответ и упростим полученную формулу алгебры:

$(a \to b) \wedge \left(\overline{c \to b}\right) \equiv (\bar{a} \vee b) \wedge \left(\overline{\bar{c} \vee b}\right) \equiv (\bar{a} \vee b) \wedge \left(\bar{\bar{c}} \wedge \bar{b}\right) \equiv (\bar{a} \vee b) \wedge \bar{\bar{c}} \wedge \bar{b} \equiv$
$\equiv \left(\bar{a} \wedge \bar{b} \vee \bar{b} \wedge b\right) \wedge c \equiv \left(\bar{a} \wedge \bar{b} \vee 0\right) \wedge c \equiv \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c.$

Из определения конъюнкции следует, что $\bar{a} \equiv 1$, $\bar{b} \equiv 1$ и $c \equiv 1$. Тогда $a \equiv 0$, $b \equiv 0$, $c \equiv 1$.

Ответ: Математическую логику изучал третий студент.

Приложение А

Таблица кодов ASCII

Коды с 1 по 32 являются системными. Например, символ CK (Carriage Return – Перевод каретки), соответствующий коду 13, указывает на движение механизма печати или курсора дисплея к исходной (крайней левой) позиции текущей строки. В текстовом документе это соответствует команде создания нового абзаца.

Dec	Hex	Char
0	00	
1	01	☺
2	02	☻
3	03	♥
4	04	♦
5	05	♣
6	06	♠
7	07	•
8	08	◘
9	09	○
10	0A	◙
11	0B	♂
12	0C	♀
13	0D	♪
14	0E	♫
15	0F	☼
16	10	►
17	11	◄
18	12	↕
19	13	‼
20	14	¶
21	15	§
22	16	▬
23	17	↨
24	18	↑
25	19	↓
26	1A	→
27	1B	←
28	1C	∟
29	1D	↔
30	1E	▲
31	1F	▼

Dec	Hex	Char
32	20	
33	21	!
34	22	"
35	23	#
36	24	$
37	25	%
38	26	&
39	27	'
40	28	(
41	29	)
42	2A	*
43	2B	+
44	2C	,
45	2D	-
46	2E	.
47	2F	/
48	30	0
49	31	1
50	32	2
51	33	3
52	34	4
53	35	5
54	36	6
55	37	7
56	38	8
57	39	9
58	3A	:
59	3B	;
60	3C	<
61	3D	=
62	3E	>
63	3F	?

Dec	Hex	Char
64	40	@
65	41	A
66	42	B
67	43	C
68	44	D
69	45	E
70	46	F
71	47	G
72	48	H
73	49	I
74	4A	J
75	4B	K
76	4C	L
77	4D	M
78	4E	N
79	4F	O
80	50	P
81	51	Q
82	52	R
83	53	S
84	54	T
85	55	U
86	56	V
87	57	W
88	58	X
89	59	Y
90	5A	Z
91	5B	[
92	5C	\
93	5D	]
94	5E	^
95	5F	_

Dec	Hex	Char
96	60	`
97	61	a
98	62	b
99	63	c
100	64	d
101	65	e
102	66	f
103	67	g
104	68	h
105	69	i
106	6A	j
107	6B	k
108	6C	l
109	6D	m
110	6E	n
111	6F	o
112	70	p
113	71	q
114	72	r
115	73	s
116	74	t
117	75	u
118	76	v
119	77	w
120	78	x
121	79	y
122	7A	z
123	7B	{
124	7C	|
125	7D	}
126	7E	~
127	7F	⌂

Ниже приведена таблица кодировки IBM cp866, которая чаще всего используется в DOS-программах для отображения русских букв и псевдографики.

Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char
128	80	А	160	A0	а	192	C0	└	224	E0	р
129	81	Б	161	A1	б	193	C1	┴	225	E1	с
130	82	В	162	A2	в	194	C2	┬	226	E2	т
131	83	Г	163	A3	г	195	C3	├	227	E3	у
132	84	Д	164	A4	д	196	C4	─	228	E4	ф
133	85	Е	165	A5	е	197	C5	┼	229	E5	х
134	86	Ж	166	A6	ж	198	C6	╞	230	E6	ц
135	87	З	167	A7	з	199	C7	╟	231	E7	ч
136	88	И	168	A8	и	200	C8	╚	232	E8	ш
137	89	Й	169	A9	й	201	C9	╔	233	E9	щ
138	8A	К	170	AA	к	202	CA	╩	234	EA	ъ
139	8B	Л	171	AB	л	203	CB	╦	235	EB	ы
140	8C	М	172	AC	м	204	CC	╠	236	EC	ь
141	8D	Н	173	AD	н	205	CD	═	237	ED	э
142	8E	О	174	AE	о	206	CE	╬	238	EE	ю
143	8F	П	175	AF	п	207	CF	╧	239	EF	я
144	90	Р	176	B0	░	208	D0	╨	240	F0	Ё
145	91	С	177	B1	▒	209	D1	╤	241	F1	ё
146	92	Т	178	B2	▓	210	D2	╥	242	F2	Є
147	93	У	179	B3	│	211	D3	╙	243	F3	є
148	94	Ф	180	B4	┤	212	D4	╘	244	F4	Ї
149	95	Х	181	B5	╡	213	D5	╒	245	F5	ї
150	96	Ц	182	B6	╢	214	D6	╓	246	F6	Ў
151	97	Ч	183	B7	╖	215	D7	╫	247	F7	ў
152	98	Ш	184	B8	╕	216	D8	╪	248	F8	°
153	99	Щ	185	B9	╣	217	D9	┘	249	F9	∙
154	9A	Ъ	186	BA	║	218	DA	┌	250	FA	·
155	9B	Ы	187	BB	╗	219	DB	█	251	FB	√
156	9C	Ь	188	BC	╝	220	DC	▄	252	FC	№
157	9D	Э	189	BD	╜	221	DD	▌	253	FD	¤
158	9E	Ю	190	BE	╛	222	DE	▐	254	FE	■
159	9F	Я	191	BF	┐	223	DF	▀	255	FF	

Учебное издание

Емелин Александр Аркадьевич
кандидат технических наук, доцент

Шаповалова Лариса Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент

ИНФОРМАТИКА.
СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ,
ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭВМ

Практикум

Редактор Н.П. Лучинкина
Верстка Г.С. Кудрявцева
Дизайн обложки С.П. Вдовикина

Подписано в печать 24.12.2019 г.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 2,5. Тираж 25 экз. Заказ № 39.

Отдел информационных технологий и издательской деятельности
Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВО Донской ГАУ
347740, г. Зерноград Ростовской области, ул. Советская, 15.